



# **Relatório Técnico**

**Núcleo de  
Computação Eletrônica**

## **Análise Numérica do Modelo de Kirchhoff-Carrier para Vibrações de Cordas Elásticas com Extremidades Móveis**

**Raquel Defelippo Rodrigues  
Mauro Antonio Rincon**

**NCE - 12/2001**

**Universidade Federal do Rio de Janeiro**

# Análise Numérica do Modelo de Kirchhoff-Carrier para Vibrações de Cordas Elásticas com Extremidades Móveis

Raquel Defelippo Rodrigues e Mauro Antonio Rincon

## Resumo

Neste trabalho, estudamos um modelo de vibrações transversais em corda elásticas que foi desenvolvido por Medeiros e Ferrel como uma extensão do modelo de Kirchhoff-Carrier, uma vez que leva em conta a troca de tamanho durante a vibração e o comportamento não linear das cordas elásticas em geral. O modelo de Medeiros e Ferrel não possui solução analítica, então usamos o Método dos Elementos Finitos para a resolução do modelo no espaço e um Método de Diferenças Central, o Método de Newmark, para a resolução do modelo no tempo e assim obtemos a solução aproximada do problema. Alguns exemplos numéricos são apresentados.

**Palavras Chave:** Equação de Kirchhoff-Carrier, extremidades móveis, solução numérica

## 1 Introdução

A descrição matemática para pequenas vibrações transversais de cordas elásticas com extremidades fixas é uma velha questão.

Os primeiros resultados matemáticos para o estudo de pequenas vibrações transversais em cordas elásticas foram obtidos por Taylor em 1713 e informações mais precisas datam de 1743 por D'Alembert e posteriormente por Euler.

O modelo proposto por D'Alembert é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

onde  $c^2 = \frac{\tau}{m}$ , sendo  $\tau$  a tensão constante durante a vibração e  $m$  a massa da corda.

Para obtermos o modelo de D'Alembert é preciso impor algumas restrições ao problema físico.

Outros modelos de problemas físicos de pequenos deslocamentos verticais em cordas elásticas com extremidades fixas foram propostos por Kirchhoff e Carrier. Sendo o modelo de Kirchhoff-Carrier dado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{2ml} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

É importante observar que o modelo de D'Alembert não considera os pequenos deslocamentos horizontais aqui considerado. Esse pequeno deslocamento horizontal, no modelo matemático, é representado pelo termo não linear.

Em 1999, Medeiros e Ferrel propuseram em [3] um modelo que é uma extensão do modelo de Kirchhoff-Carrier, pois considera a troca de tamanho das cordas elásticas durante a vibração apresentado por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - L_0}{L_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

Sendo  $L_0$  o tamanho inicial,  $\tau_0$  a tensão inicial,  $m$  a massa,  $k$  o módulo de Young do material vezes a seção transversal da corda e  $u(x, t)$  o deslocamento vertical do ponto  $x$  da corda no tempo  $t$ . As funções  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  dão o movimento dos extremos da corda durante a vibração sendo  $\alpha(t) < \beta(t)$  e  $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ .

## 2 Formulação do Problema

O modelo para pequenas vibrações de cordas elásticas com extremidades móveis foi apresentado como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \frac{\gamma(t) - L_0}{L_0} + \frac{k}{2m\gamma(t)} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

Com o domínio não-retangular dado por

$$\hat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2; \alpha(t) < x < \beta(t), \forall t \geq 0\} \quad (5)$$

e sua fronteira definida como

$$\hat{E} = \bigcup_{0 < t < T} \{\alpha(t), \beta(t)\} \times \{t\} \quad (6)$$

Tomando-se o operador diferencial definido pela função real  $u(x, t)$  :

$$\hat{L}u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ a(t) + b(t) \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

com

$$a(t) = \frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{m} \left( \frac{\gamma(t) - \gamma_0}{\gamma_0} \right) \quad (8)$$

$$b(t) = \frac{k}{2m\gamma(t)} \quad (9)$$

O problema que estudaremos será o de determinar uma função  $u = u(x, t)$ , no espaço das soluções  $H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)$ , tal que,

$$I = \begin{cases} \hat{L}u(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in \hat{Q} \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \hat{E} \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), & \alpha_0 < x < \beta_0 \end{cases} \quad (10)$$

as equações (10) formam o que chamaremos de Problema (I).

A existência e unicidade de soluções locais do Problema (I) foram analisadas em [3], e dadas pelo seguinte Teorema.

**TEOREMA 1:** *Seja  $\Omega_t$  e  $\Omega_0$  os intervalos  $(\alpha(t), \beta(t))$  e  $(\alpha(0), \beta(0))$ . Considere as seguintes hipóteses:*

- i)  $a(t) \in W^{1,\infty}(0, \infty)$ ,  $a(t) \geq m_0 > 0$
- ii)  $\alpha, \beta \in C^2([0, T_0]; \mathbb{R})$ ;  
 $\alpha(t) < \beta(t)$ ,  $\alpha'(t) < 0$ ,  $\beta'(t) > 0$  para  $0 \leq t < T$ ;  
 $|\alpha'(t) + \gamma'(t)y| < \left(\frac{m_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$  para  $0 \leq t < T$  e  $0 \leq y < 1$

Então, dado  $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$ ,  $u_1 \in H_0^1(\Omega_0)$ ,  $f \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_t))$  existe uma única solução  $u : \hat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  do Problema (I) satisfazendo as seguintes condições para  $0 < T_0 < T$ :

$$\begin{cases} u & \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \\ u' & \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega_t)) \\ u'' & \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega_t)) \end{cases} \quad (11)$$

Note que a função  $b(t)$  em (9) não pode ser negativa para todo  $t$  por consequência da positividade do módulo de Young.

**obs:** As hipóteses  $\alpha'(t) < 0$  e  $\beta'(t) > 0$  implicam que  $\hat{Q}$  é crescente, assim se  $t_2 > t_1$  a projeção de  $[\alpha(t_1), \beta(t_1)]$  no subespaço  $t = 0$  está incluída na projeção de  $[\alpha(t_2), \beta(t_2)]$  no subespaço igual. Isto significa que a função real  $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$  é crescente em  $0 \leq t < T$ .

Para a demonstração do Teorema 1 é necessário primeiramente transformarmos o Problema (I), no seguinte problema equivalente.

### 3 Problema Equivalente

Trabalhar diretamente com o operador  $\hat{L}u(x, t)$ , dado em (7), origina certas dificuldades devido a natureza variável do domínio de integração  $\hat{Q}$ , dado em (5), com o tempo  $t$ , que torna o Problema (I), (10), difícil de ser solucionado diretamente. Para contornar estas dificuldades, transformamos o domínio não-retangular  $\hat{Q}$  num domínio retangular  $Q = (0, 1) \times ]0, T[$ , onde isso é feito por meio da seguinte transformação:

$$T: \begin{array}{ccc} \hat{Q} & \rightarrow & Q \\ (x, t) & \mapsto & (y, t) \end{array} \quad (12)$$

onde

$$y = \frac{x - \alpha(t)}{\gamma(t)}$$

Aplicando a transformação  $T$  definida em (12) no operador  $\hat{L}u(x, t)$  dado em (7) obtemos o operador  $Lv(y, t)$ .

$$Lv(y, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (13)$$

onde

$$a(y, t) = \frac{b(y, t)^2}{4} - \frac{1}{\gamma(t)^2} \left\{ a(t) + \frac{b(t)}{\gamma(t)} \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right\} \quad (14)$$

$$b(y, t) = -2 \left( \frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right) \quad (15)$$

$$c(y, t) = -\frac{1}{\gamma(t)} \left( \alpha''(t) + \gamma''(t) + \gamma'(t)b(y, t) \right) \quad (16)$$

A transformação  $T$  é dada pela seguinte proposição.

**Proposição 1:** O operador  $Lv(y, t)$ , definido em (13), é obtido a partir do operador  $\hat{L}u(x, t)$ , definido em (7), por meio da mudança de variável dada pela transformação (12).

Obtemos assim, num domínio retangular  $Q = (0, 1) \times (0, T)$ , o problema equivalente de determinar uma função  $v = v(y, t)$ , no espaço das soluções  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , tal que,

$$II = \begin{cases} Lv(y, t) = g(y, t), & \forall (y, t) \in Q = (0, 1) \times (0, T) \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, & 0 < t < T \\ v(y, 0) = v_0(y), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1(y), & 0 < y < 1 \end{cases} \quad (17)$$

As equações (17), formam o que chamaremos de Problema equivalente (II).

Em [3], provou-se que sob as hipóteses (i) e (ii) do Teorema 1 o Problema equivalente (II) tem solução. Como a transformação  $T$ , dada em (12), é um isomorfismo então a solução  $v(y, t)$  do Problema (II) é transformada na solução  $u(x, t)$  do Problema (I).

Por conveniência, a análise numérica usando elementos finitos será baseada no Problema equivalente (II) de domínio retangular, ou seja determinaremos a solução aproximada do Problema equivalente (II).

## 4 Método dos Elementos Finitos

### Formulação Variacional

O Método dos elementos finitos não é aplicável diretamente ao Problema (II), (17). Assim, é necessário expressar o problema numa forma mais adequada, ou seja, a formulação variacional, para que seja possível aplicar o Método de Galerkin.

Seja  $D(\Omega)$  o espaço das funções teste, infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $\Omega$  e  $w \in D(\Omega)$ . Multiplicando a primeira equação do Problema (II), (17), por  $w$  e integrando em  $\Omega = (0, 1)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dy + \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} w dy + \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} w dy + \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} w dy \\ &= \int_0^1 g(y, t) w dy \end{aligned} \quad (18)$$

### Método de Galerkin

O Método de Galerkin consiste em aproximar o espaço das soluções por um subespaço de dimensão finita.

Para aproximarmos tal espaço, definimos um subespaço  $V_m$  gerado pelos  $m$  primeiros elementos da base do espaço  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , ou seja,

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m] \quad (19)$$

onde  $[\varphi_i]_{i \in \mathbb{N}}$  é uma base de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Agora, buscamos uma solução aproximada  $v^h(y, t)$  do Problema (II) no subespaço  $V_m$ .

### Problema aproximado

Aproximamos o Problema (II), (17), pelo problema de determinar no espaço das soluções  $V_m$ , uma função  $v^h = v^h(y, t)$ , tal que,

$$III = \begin{cases} Lv^h(y, t) = g(y, t) & \forall (y, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ v^h(0, t) = v^h(1, t) = 0 & 0 < t < T \\ v^h(y, 0) = v_0^h(y), \quad \frac{\partial v^h}{\partial t}(y, 0) = v_1^h(y) & 0 < y < 1 \end{cases} \quad (20)$$

As equações (20) formam o que chamaremos de Problema (III).

Substituindo  $v^h = v^h(y, t)$  em (13) temos o operador  $Lv^h(y, t)$  dado por:

$$Lv^h(y, t) = \frac{\partial^2 v^h}{\partial t^2} + a(y, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial y^2} + b(y, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial v^h}{\partial y} \quad (21)$$

onde  $v^h(y, t) \in V_m$  é uma solução aproximada de  $v(y, t)$ , e  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$  e  $c(y, t)$  são dados em (14), (15) e (16), respectivamente.

Assim, a equação (18) é agora dada por

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2 v^h}{\partial t^2} w dy + \int_0^1 a(y, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial y^2} w dy + \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial t \partial y} w dy + \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial v^h}{\partial y} w dy \\ &= \int_0^1 g(y, t) w dy \end{aligned} \quad (22)$$

Integrando por partes a segunda integral, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial^2 v^h}{\partial t^2} w dy - \int_0^1 \frac{\partial v^h}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (a(y, t) w) dy + \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial^2 v^h}{\partial t \partial y} w dy \\ &+ \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial v^h}{\partial y} w dy = \int_0^1 g(y, t) w dy \end{aligned} \quad (23)$$

Com  $v^h(y, t) \in V_m$  podemos escrever  $v^h(y, t)$  da seguinte maneira

$$v^h(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), \quad \varphi_i(y) \in V_m \quad (24)$$

Para obtermos a solução aproximada  $v^h(y, t) \in V_m$  é necessário determinar os coeficientes  $d_i(t)$ .

Substituindo (24) em (23) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^m (\ddot{d}_i(t) \varphi_i(y)) w \right) dy - \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^m \left( d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} (a(y, t) w) \right) dy \\ &+ \int_0^1 \left( b(y, t) \sum_{i=1}^m \left( \dot{d}_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \right) w \right) dy \\ &+ \int_0^1 \left( c(y, t) \sum_{i=1}^m \left( d_i(t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \right) w \right) dy = \int_0^1 (g(y, t) w) dy \end{aligned} \quad (25)$$

Em particular tomando  $w = \varphi_j(y) \in V_m$  em (25) obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \left\{ \ddot{d}_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy - d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y, t) \varphi_j(y) \right) dy \right. \\
& \quad \left. + \dot{d}_i(t) \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy + d_i(t) \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy \right\} \\
& = \int_0^1 \left( g(y, t) \varphi_j(y) \right) dy
\end{aligned} \tag{26}$$

para  $j = 1, 2, \dots, m$

## 5 Função de Interpolação

Dado  $V_m$  um subespaço de  $H_0^1(\Omega) \cap H^2$  apresentado em (19) como:

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m]$$

As funções base  $\varphi_i$  escolhidas são funções de interpolação linear por partes satisfazendo a seguinte condição:

$$\varphi_i(y_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{27}$$

onde  $y_j \in [0, 1]$  é denominado nó. Os nós são pontos discretos do intervalo  $[0, 1]$ , sendo cada intervalo  $[y_i, y_{i+1}]$  considerado um elemento finito  $e$ . Os nós  $y_j$  e os elementos  $e$  estão representados na Figura 1.

Tomando  $m + 1$  o número de nós em  $[0, 1]$ , definimos:

$$h_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{28}$$

Observemos que a função  $g(y, t)$ , que aparece na equação (26), pode ser interpolada pela função  $\varphi_i(y)$  obtendo-se:

$$g(y, t) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(y) g_i(t) \tag{29}$$

onde

$$g(y_i, t) = g_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Assim, substituindo a equação (29) em (26) temos



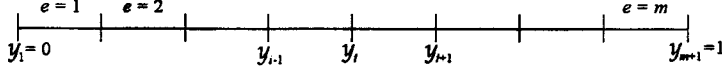


Figure 1: Elementos finitos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m \left\{ \ddot{d}_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy - d_i(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y, t) \varphi_j(y) \right) dy \right. \\
 & \quad \left. + \dot{d}_i(t) \int_0^1 b(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy + d_i(t) \int_0^1 c(y, t) \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y} \varphi_j(y) dy \right\} \\
 & = \sum_{i=1}^m g_i(t) \int_0^1 \varphi_i(y) \varphi_j(y) dy
 \end{aligned} \tag{30}$$

para  $j = 1, 2, \dots, m$

### Problema local

Uma forma mais apropriada de determinar a solução aproximada do Problema (III), (20), é através das soluções locais. Para obtermos tais soluções locais precisamos considerar uma partição do domínio  $\Omega$  em subregiões  $\Omega_e$  tal que

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^m \Omega_e, \quad \Omega_e \cap \Omega_s = \emptyset, \quad e \neq s$$

Consideremos  $\Omega = (0, 1)$  e uma discretização não necessariamente uniforme dada por:

$$y_{i+1} = y_i + h_i, \quad i = 2, \dots, m$$

onde  $y_1 = 0$  e  $y_{m+1} = 1$  devido as condições de fronteira.

Para cada intervalo  $[y_i, y_{i+1}]$ , consideremos um elemento  $e$ , denominado elemento finito e as coordenadas locais  $[y_1^e, y_2^e] = [y_i, y_{i+1}]$ . Geometricamente os  $m$  elementos podem ser representado como mostrado na Figura 2.

Assim, temos  $m$  intervalos chamados de elementos finitos,

$$[y_1^e, y_2^e], \quad e = 1, \dots, m$$

Pela aplicação do Método de Galerkin, vimos em (24) que a solução aproximada  $v^h(y, t)$  é dada por

$$v^h(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), \quad \forall y \in \Omega$$

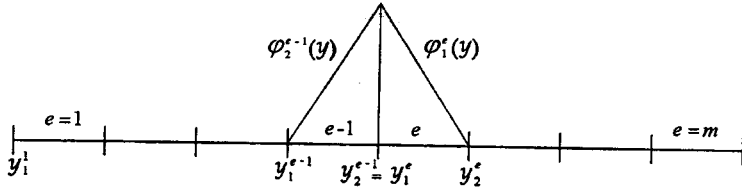


Figure 2: Representação geométrica dos elementos

Localmente a solução aproximada é dada por

$$v_e^h(y, t) = \sum_{a=1}^2 d_a^e(t) \varphi_a^e(y), \quad \forall y \in \Omega_e \quad (31)$$

Desta forma a solução aproximada  $v^h(y, t)$  do Problema (III), (20), é dada por

$$v^h(y, t) = \bigcup_{e=1}^m v_e^h(y, t) \quad (32)$$

Para cada intervalo local  $[y_1^e, y_2^e]$ , ou seja, para cada elemento  $e$ , definimos a função de interpolação local  $\varphi_a^e(y)$  dada por:

$$\varphi_a^e(y) = \begin{cases} \varphi_1^e(y) = \frac{y_2^e - y}{h_e} & \forall y \in [y_1^e, y_2^e] \\ \varphi_2^e(y) = \frac{y - y_1^e}{h_e} & \forall y \in [y_1^e, y_2^e] \\ 0 & \forall y \notin [y_1^e, y_2^e] \end{cases} \quad (33)$$

onde  $h_e = y_2^e - y_1^e$ .

Com a notação acima, definimos (30) em termos de cada elemento

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^2 \left\{ \ddot{d}_a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a^e(y) \varphi_b^e(y) dy - d_a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y, t) \varphi_b^e(y) \right) dy \right. \\ & \left. + \dot{d}_a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} b(y, t) \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy + d_a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} c(y, t) \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy \right\} \\ & = \sum_{a=1}^2 g_a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a^e(y) \varphi_b^e(y) dy \end{aligned} \quad (34)$$

para  $b = 1, 2$  e  $e = 1, 2, \dots, m$ .

A equação (34) é de difícil solução devido a existência das funções  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$  e  $c(y, t)$  nas integrais.

Com o conceito local apresentado anteriormente e assumindo que o tamanho  $h_e$  de cada elemento é suficientemente pequeno passaremos a considerar as funções contínuas  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$  e  $c(y, t)$  constantes em cada elemento finito  $e$ .

Assim, tomamos  $a(y, t) = a^e(t)$ ,  $b(y, t) = b^e(t)$  e  $c(y, t) = c^e(t)$  considerando  $y = \bar{y}$  constante em cada elemento finito  $e$ , obtemos de (14), (15) e (16):

$$a^e(t) = \frac{b^e(t)^2}{4} - \frac{1}{\gamma(t)^2} \left\{ a(t) + \frac{b(t)}{\gamma(t)} \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right\} \quad (35)$$

$$b^e(t) = -2 \left( \frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)\bar{y}}{\gamma(t)} \right) \quad (36)$$

$$c^e(t) = -\frac{1}{\gamma(t)} (\alpha''(t) + \gamma''(t) + \gamma'(t)b^e(t)) \quad (37)$$

Substituindo em (34), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^m \left\{ \ddot{d}_a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a^e(y) \varphi_b^e(y) dy - d_a^e(t) a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_b^e(y)}{\partial y} dy \right. \\ & \left. + \dot{d}_a^e(t) b^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy + d_a^e(t) c^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy \right\} \\ & = \sum_{a=1}^2 g_a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a^e(y) \varphi_b^e(y) dy \end{aligned} \quad (38)$$

para  $b = 1, 2$  e  $e = 1, 2, \dots, m$ .

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^2 \left\{ \ddot{d}_a^e(t) \left( \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a^e(y) \varphi_b^e(y) dy \right) + \dot{d}_a^e(t) \left( b^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy \right) \right. \\ & \left. + d_a^e(t) \left( -a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_b^e(y)}{\partial y} dy + c^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy \right) \right\} \\ & = \sum_{a=1}^2 \left\{ g_a^e(t) \left( \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a^e(y) \varphi_b^e(y) dy \right) \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

para  $b = 1, 2$  e  $e = 1, 2, \dots, m$ .

Denotando por  $M$ , a matriz de ordem  $(m \times m)$  denominada matriz massa da corda,  $C$ , a matriz de ordem  $(m \times m)$  denominada matriz amortecimento da

corda e  $K$ , a matriz de ordem  $(m \times m)$  denominada matriz rigidez da corda e  $G$ , o vetor de ordem  $(m \times 1)$  denominado de vetor força. Onde

$$M = \sum_{e=1}^m M_{ab}^e, \quad C = \sum_{e=1}^m C_{ab}^e, \quad K = \sum_{e=1}^m K_{ab}^e \quad e \quad G = \sum_{e=1}^m G_a^e \quad (40)$$

Restringindo as matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  e o vetor força  $G$  a cada elemento  $e$ , temos:

$$M_{ab}^e = \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a^e(y) \varphi_b^e(y) dy \quad (41)$$

$$C_{ab}^e = b^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy \quad (42)$$

$$K_{ab}^e = -a^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \frac{\partial \varphi_b^e(y)}{\partial y} dy + c^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \frac{\partial \varphi_a^e(y)}{\partial y} \varphi_b^e(y) dy \quad (43)$$

$$G_a^e = g^e(t) \int_{y_1^e}^{y_2^e} \varphi_a(y) \varphi_b(y) dy \quad (44)$$

para  $1 \leq a, b \leq 2$ .

Denominamos por  $M_{ab}^e$  a matriz massa local de ordem  $(2 \times 2)$ ,  $C_{ab}^e$  a matriz amortecimento local de ordem  $(2 \times 2)$ ,  $K_{ab}^e$  a matriz rigidez local de ordem  $(2 \times 2)$  e  $G_a^e$  o vetor força local de ordem  $(2 \times 1)$ .

Essas matrizes locais de ordem  $(2 \times 2)$  foram introduzidas devido ao fato delas terem muitos zeros, pois

$$\varphi_a(y) \varphi_b(y) = 0 \quad \text{se } |a - b| \geq 2$$

Com as matrizes globais  $M$ ,  $C$ ,  $K$ , e o vetor força global  $G$  montados a partir das matrizes locais e do vetor força local é possível, agora, escrever (39) numa forma matricial dada por:

$$M\ddot{d}(t) + C\dot{d}(t) + Kd(t) = G \quad (45)$$

onde a matriz de massa global  $M$  é simétrica e a matriz de amortecimento global  $C$  é anti-simétrica. Sendo  $d = [d_1, d_2, \dots, d_{m+1}]^t$  o vetor incógnita.

## 6 Método de Newmark

Matematicamente, a equação (45) representa um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e, em particular, a solução das equações não são simples já que as matrizes dependem de  $y$  em cada instante de tempo. E os procedimentos usualmente propostos para a solução de sistemas gerais de equações diferenciais podem ser muito caros se a ordem das matrizes for grande.

O Método de Newmark foi escolhido para resolver o sistema de equações de segunda ordem representado pela equação (45). Este método é um dos métodos das Diferenças Finitas que foi apresentado por Newmark em 1959, e a partir daí tem sendo largamente utilizado para a resolução de problemas dinâmicos.

O método de Newmark nos dá a solução no final de um passo do tempo expressada por uma série de Taylor aproximado por:

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \Delta t \dot{d}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ (1 - 2\xi) \ddot{d}(t) + 2\xi \ddot{d}(t + \Delta t) \right] \quad (46)$$

$$\dot{d}(t + \Delta t) = \dot{d}(t) + \Delta t \left[ (1 - \delta) \ddot{d}(t) + \delta \ddot{d}(t + \Delta t) \right] \quad (47)$$

onde  $\xi$  e  $\delta$  são parâmetros livres que determinam a estabilidade e precisão características do algoritmo considerado. A especificação dessas constantes nos fornece uma variedade de métodos conhecidos como Família de Métodos de Newmark.

O problema de valor inicial para (20) consiste em encontrar um deslocamento  $d(t)$  tal que,

$$IV = \begin{cases} M \ddot{d}(t) + C \dot{d}(t) + K d(t) = G \\ d(0) = d_0 \\ \dot{d}(0) = \dot{d}_0 \end{cases} \quad (48)$$

onde  $d(0)$  e  $\dot{d}(0)$  são os deslocamentos e as velocidades iniciais dos nós da corda conhecidos. As equações (48) formam o que chamaremos de Problema (IV).

Do Problema (III), (20), temos ainda as condições de fronteira dadas pela segunda equação de (20) que devem ser respeitadas, ou seja,

$$d(t) = 0 \quad \text{para } y = 0 \text{ e } y = 1 \quad (49)$$

Como  $\dot{d}(t)$  corresponde a velocidade nodal e  $\ddot{d}(t)$  a aceleração nodal, faremos a seguinte associação  $\dot{d}(t) = v(t)$  e  $\ddot{d}(t) = a(t)$ . Assim de (45), (46) e (47) temos, para cada instante de tempo  $t_n = n\Delta t$ , o seguinte sistema iterativo:

$$\begin{aligned} M a_{n+1} + C v_{n+1} + K d_{n+1} &= G \\ d_{n+1} &= d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\xi) a_n + 2\xi a_{n+1}] \\ v_{n+1} &= v_n + \Delta t [(1 - \delta) a_n + \delta a_{n+1}] \end{aligned} \quad (50)$$

onde  $a_n$ ,  $v_n$  e  $d_n$  representam  $\ddot{d}(t_n)$ ,  $\dot{d}(t_n)$  e  $d(t_n)$  respectivamente.

De (50) temos três equações para determinarmos três incógnitas  $a_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$  e  $d_{n+1}$ .

Neste trabalho, escolhemos trabalhar com  $\xi = 0$  e  $\delta = \frac{1}{2}$  o que corresponde a um Método de Diferença Central. Assim (50) pode ser reescrita como:

$$Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} = G \quad (51)$$

$$d_{n+1} = d_n + \Delta tv_n + \frac{\Delta t^2}{2}a_n \quad (52)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2}(a_n + a_{n+1}) \quad (53)$$

### Implementação

Existem várias possibilidades para a implementação deste método, assim escolhemos a seguinte forma.

#### - Dados Iniciais

Para  $t_n = 0$ , as matrizes de massa global  $M$ , de amortecimento global  $C$  e rigidez global  $K$ , e o vetor global  $G$  são montados como foi apresentado anteriormente utilizando o Método dos Elementos Finitos.

De (48) temos que o deslocamento inicial  $d_0$  e a velocidade inicial  $v_0$  são dados. A partir daí é possível calcular a aceleração inicial  $a_0$  diretamente de (51), ou seja:

$$Ma_0 = G - Cv_0 - Kd_0 \quad (54)$$

resolvendo o sistema linear (54) nós obtemos a aceleração inicial  $a_0$ .

#### - Demais instantes de tempo

Para cada  $t_n$ , as matrizes globais  $M$ ,  $C$  e  $K$ , e o vetor global  $G$  são montados como foi apresentado utilizando o Método dos Elementos Finitos.

Substituindo (52) e (53) em (51) temos

$$Ma_{n+1} + C \left( v_n + \frac{\Delta t}{2}(a_n + a_{n+1}) \right) + K \left( d_n + \Delta tv_n + \frac{\Delta t^2}{2}a_n \right) = G \quad (55)$$

Separando em (55) no lado esquerdo da equação o que for relativo ao tempo  $t_{n+1}$  e do lado direito o que for relativo ao tempo  $t_n$ , obtemos

$$Ma_{n+1} + C \frac{\Delta t}{2}a_{n+1} = G - C \left( v_n + \frac{\Delta t}{2}a_n \right) - K \left( d_n + \Delta tv_n + \frac{\Delta t^2}{2}a_n \right) \quad (56)$$

$$\left( M + C \frac{\Delta t}{2} \right) a_{n+1} = G - C \left( v_n + \frac{\Delta t}{2}a_n \right) - K \left( d_n + \Delta tv_n + \frac{\Delta t^2}{2}a_n \right) \quad (57)$$

Definimos os preditores como sendo:

$$\tilde{d}_{n+1} = d_n + \Delta tv_n + \frac{\Delta t^2}{2}a_n \quad (58)$$

$$\tilde{v}_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2} a_n \quad (59)$$

Logo as equações (52) e (53) podem ser reescritas como:

$$d_{n+1} = \tilde{d}_{n+1} \quad (60)$$

$$v_{n+1} = \tilde{v}_{n+1} + \frac{\Delta t}{2} a_{n+1} \quad (61)$$

Substituindo (58) e (59) em (57) temos que a relação recursiva para determinar  $a_{n+1}$  é dada por

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2} C\right) a_{n+1} = G_{n+1} - C\tilde{v}_{n+1} - K\tilde{d}_{n+1} \quad (62)$$

As equações (60) e (61) serão utilizadas para calcularmos  $d_{n+1}$  e  $v_{n+1}$ , respectivamente.

Logo, para cada instante de tempo  $t_n = n\Delta t$  com  $0 \leq t_n \leq T$  obtem-se  $d_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Da equação (24) temos que

$$v^h(y, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) \varphi_i(y), \quad \varphi_i \in V_m$$

Com os deslocamentos nodais  $d_{n+1}$  calculados encontramos  $v^h(y, t)$  dado pela relação (24). Assim temos a solução do Problema (III).

Mas, vimos anteriormente que resolver o Problema (III) implica em encontrar uma solução aproximada para o Problema (II). E como a transformação  $T$ , dada em (12), é um isomorfismo podemos afirmar que resolver o Problema (II) é equivalente a resolver o Problema (I).

## 7 Solução Global

Para a obtenção da solução global  $v(y, t)$ , para o problema cilíndrico definido em (17) Medeiros e Ferrel introduziram uma viscosidade  $\delta v'(y, t)$ , onde  $\delta$  é uma constante positiva fixada, ou seja, que a força deve ser proporcional a velocidade do deslocamento. Assim, o problema penalizado é dado pelo seguinte problema retangular:

$$V = \begin{cases} Lv(y, t) + \delta v'(y, t) = g(y, t) & \forall (y, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 & \forall t \\ v(y, 0) = v_0(y), \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1(y) & 0 < y < 1 \end{cases} \quad (63)$$

onde  $v_0$  e  $v_1$  são conhecidos e  $Lv(y, t)$  é o operador definido em (13)

$$Lv(y, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b(y, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} + c(y, t) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (64)$$

onde

$$\begin{aligned} a(y, t) &= \frac{b(y, t)^2}{4} - \frac{1}{\gamma(t)^2} \left\{ a(t) + \frac{b(t)}{\gamma(t)} \int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy \right\} \\ b(y, t) &= -2 \left( \frac{\alpha'(t) + \gamma'(t)y}{\gamma(t)} \right) \\ c(y, t) &= -\frac{1}{\gamma(t)} \left( \alpha''(t) + \gamma''(t) + \gamma'(t)b(y, t) \right) \end{aligned}$$

A introdução da viscosidade  $\delta v'(y, t)$  se faz necessária para o estudo da solução global. Pois sem ela não é possível conseguir as estimativas *à priori* necessárias para a obtenção da solução global.

Desde que  $u(x, t) = v(y, t)$ , com

$$y = \frac{x - \alpha(t)}{\beta(t)}$$

então:

$$v'(y, t) = \left( \frac{x - \alpha(t)}{\beta(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (65)$$

por consequência

$$\hat{L}u(x, t) + \delta \left[ \left( \frac{x - \alpha(t)}{\beta(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] = f(x, t) \quad (66)$$

Assim, o seguinte problema não-cilíndrico é obtido, equivalente ao problema (63):

$$\begin{cases} \hat{L}u(x, t) + \delta \left[ \left( \frac{x - \alpha(t)}{\beta(t)} \gamma'(t) + \alpha'(t) \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] = f(x, t) \\ u(x, t) = 0 & (x, t) \in \hat{E} \\ u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \alpha_0 < x < \beta_0 \end{cases} \quad (x, t) \in \hat{Q} \quad (67)$$

Portanto, encontrando a solução global de (63), obtém-se uma solução global para o problema misto (67) associado às vibrações de uma corda elástica com extremidades móveis, devido equivalência dos problemas.



## 8 Simulações Numéricas

Exemplos numéricos serão mostrados nesta seção para ilustrar algumas características do modelo para pequenas vibrações transversais de cordas elásticas com extremidades móveis.

Vimos que resolver o Problema (III), (20), ou seja, encontrar  $v^h(y, t)$  implica em encontrar uma solução aproximada do Problema (II), (17), e assim resolver o Problema (I), (10), ou seja, encontrar  $u(x, t)$  já que o Problema (I) é equivalente ao Problema (II).

Para os exemplos numéricos consideraremos uma corda elástica subdividida em 100 elementos finitos e o passo do tempo  $\Delta t = 0,0005$ .

A Figura 3 mostra o movimento de uma corda que possui seus extremos variando com o passar do tempo.

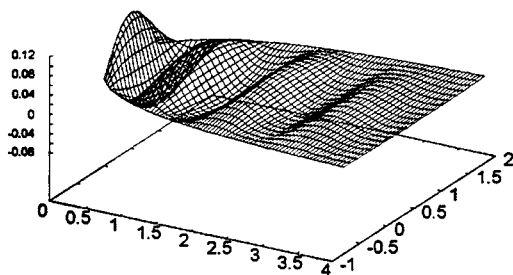


Figure 3: Vibração de uma corda elástica com os extremos livres

### 8.1 Exemplo 1

Consideraremos a posição inicial da corda e a velocidade inicial dadas por:

$$v^h(y, 0) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi y) \quad (68)$$

$$\frac{\partial v^h(y, 0)}{\partial t} = 0 \quad (69)$$

O movimento dos extremos, apresentados no gráfico 4, são dados por:

$$\alpha(t) = -\frac{t}{t+1} \quad \text{e} \quad \beta(t) = \frac{2t+1}{t+1} \quad (70)$$

Normalmente, a força externa aplicada na corda elástica é considerada nula, mas primeiramente nós construiremos um exemplo numérico onde a força externa não é nula, com o intuito de confirmarmos que a solução está sendo obtida corretamente.

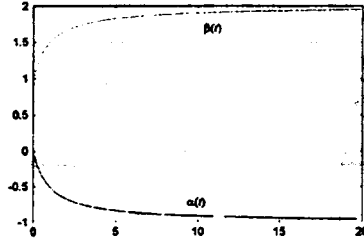


Figure 4: Movimento dos extremos:  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$

Para isso, passamos a considerar a solução exata do Problema (III) como sendo:

$$v^h(y, t) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi y) \cos(\pi t) \quad (71)$$

Observemos que a solução exata (71) possui as condições iniciais (68) e (69).

Para construirmos a força externa basta substituírmos (71) em (20).

Consideremos as seguintes características físicas da corda:

$$\frac{\tau_0}{m} = 10 \text{ e } \frac{k}{m} = 5$$

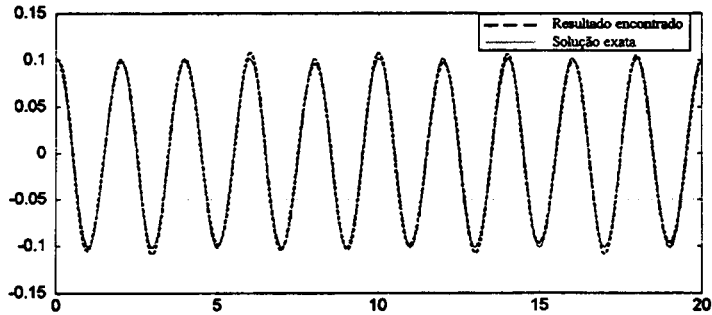


Figure 5:  $v^h(0.5, t)$  e a solução exata

O gráfico 5 mostra o movimento encontrado do nó do meio da corda e a solução exata para o mesmo ponto. Assim, temos que a solução aproximada encontrada para o Problema(III) está bem próxima da solução exata conhecida. A partir desse resultado temos a segurança que a solução do Problema (III) está sendo obtida corretamente, assim passamos a estudar o movimento da corda elástica quando a força externa é nula.

Os gráficos apresentados em 6 representam o movimento do nó do meio da corda quando a força externa é nula, onde as seguintes características físicas da

corda são respectivamente consideradas:

$$\frac{\tau_0}{m} = 10 \text{ e } \frac{k}{m} = 5 \quad ; \quad \frac{\tau_0}{m} = 5 \text{ e } \frac{k}{m} = 10$$

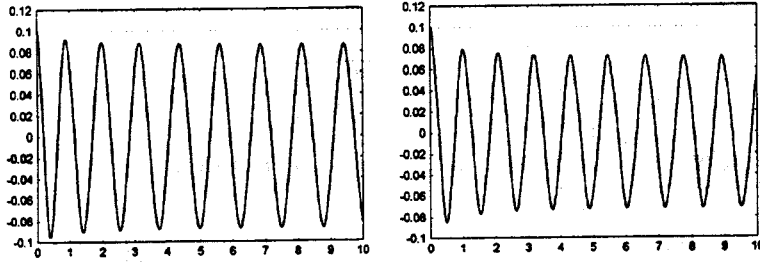


Figure 6:  $v^h(0.5, t)$  quando  $\frac{\tau_0}{m} = 10$  e  $\frac{k}{m} = 5$  e quando  $\frac{\tau_0}{m} = 5$ , e  $\frac{k}{m} = 10$

Apresentamos em 7 os gráficos obtidos quando tomamos

$$\frac{\tau_0}{m} = 5 \text{ e } \frac{k}{m} = 50 \quad ; \quad \frac{\tau_0}{m} = 50 \text{ e } \frac{k}{m} = 5$$

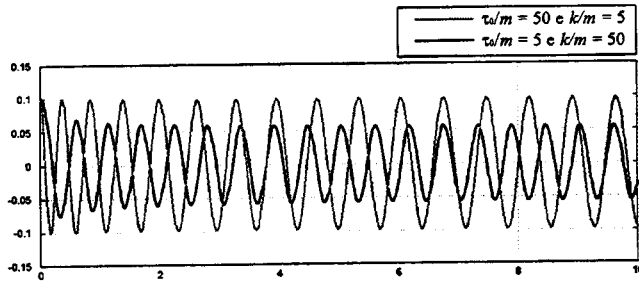


Figure 7:  $v^h(0.5, t)$  quando  $\frac{\tau_0}{m} = 5$  e  $\frac{k}{m} = 50$  e quando  $\frac{\tau_0}{m} = 50$  e  $\frac{k}{m} = 5$

Observemos que  $k$  está diretamente relacionado com o número de oscilações que ocorrem durante o movimento vibratório da corda.

Quando tomamos  $\tau_0$  muito maior que  $k$ , estamos trabalhando com um modelo quase linear.

A Figura 8 mostra a posição da corda para os tempos

$$t = 0 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1$$

quando tomamos

$$\frac{\tau_0}{m} = 1 \text{ e } \frac{k}{m} = 5$$

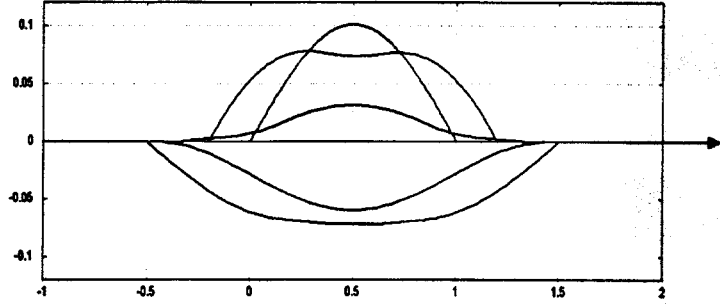


Figure 8:  $u(x, t)$

Embora, em [3], exista a condição de  $\tau_0 > k$ , observamos através de várias testes que apesar de tomarmos  $k > \tau_0$  ainda é possível resolver o Problema I.

Na seção 7, o problema original (10) foi penalizado para que fosse possível obtermos uma solução global para o mesmo. Mas, observamos que para o exemplo 1 a solução global é obtida mesmo sem a penalização.

As Figuras 9 e 10 apresentam o movimento do nó do meio da corda quando resolvemos o problema penalizado (63) tomando respectivamente

$$\delta = 0,1 ; \quad \delta = 0,3 ; \quad \delta = 0,6$$

Quando

$$\frac{\tau_0}{m} = 10 \text{ e } \frac{k}{m} = 5$$

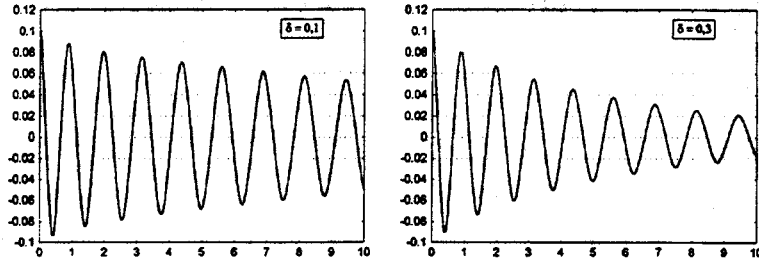


Figure 9:  $v^h(0.5, t)$  quando  $\delta = 0,1$  e  $0,3$

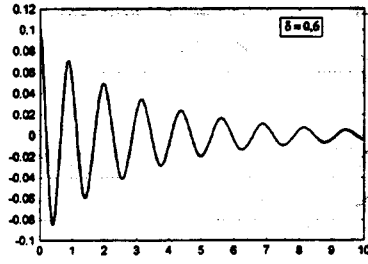


Figure 10:  $v^h(0.5, t)$  quando  $\delta = 0,6$

Da Figura 6 temos que o amortecimento da corda com o passar do tempo está ocorrendo lentamente, enquanto que as Figuras 9 e 10 mostram um amortecimento mais acentuado a medida que tomamos um  $\delta$  maior.

## 8.2 Exemplo 2

A posição e a velocidade inicial da corda são as mesmas consideradas no exemplo 1:

$$v^h(y, 0) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi y)$$

$$\frac{\partial v^h(y, 0)}{\partial t} = 0$$

Mas, consideramos o movimento dos extremos, apresentados no gráfico 11, agora dados por:

$$\alpha(t) = -t, \quad \beta(t) = t + 1 \quad (72)$$

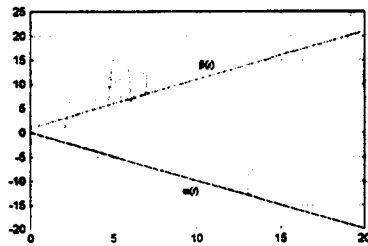


Figure 11: Movimento dos extremos:  $\alpha(t) = -t$ , e  $\beta(t) = t + 1$

Os gráficos apresentados em 12 representam o movimento do nó do meio da corda quando a força externa é nula, sendo as características físicas da corda

respectivamente consideradas como:

$$\frac{\tau_0}{m} = 10 \text{ e } \frac{k}{m} = 5 \quad ; \quad \frac{\tau_0}{m} = 5 \text{ e } \frac{k}{m} = 10$$

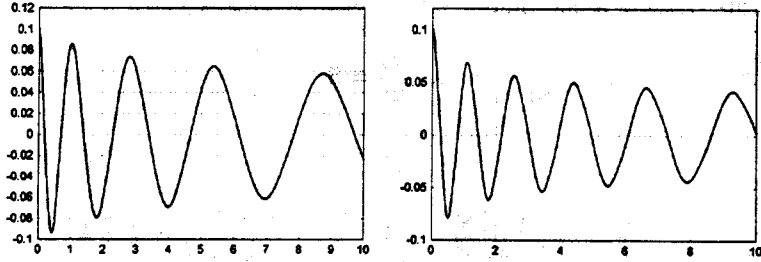


Figure 12:  $v^h(0.5, t)$  quando  $\frac{\tau_0}{m} = 10$  e  $\frac{k}{m} = 5$  e quando  $\frac{\tau_0}{m} = 5$  e  $\frac{k}{m} = 10$

### 8.3 Exemplo 3

Consideraremos a posição inicial da corda e a velocidade inicial dadas por:

$$v^h(y, 0) = \frac{1}{10} \sin(\pi y)$$

$$\frac{\partial v^h(y, 0)}{\partial t} = 0$$

O movimento dos extremos, apresentados no gráfico 13, são dados por:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi t}{10} - 1 \right) \text{ e } \beta(t) = \frac{1}{2} \left( 3 - \cos \frac{2\pi t}{10} \right) \quad (73)$$

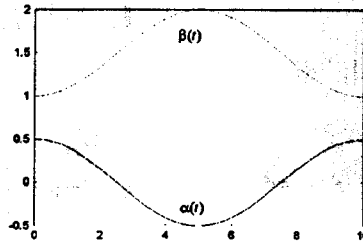


Figure 13: Movimento dos extremos:  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$

Nos exemplos anteriores tomamos  $\gamma(t) = \beta(t) - \alpha(t)$  crescente. Verificaremos através do corrente exemplo o que ocorre quando tomamos uma função  $\gamma(t)$  que não é sempre crescente contrariando assim o Teorema 1.

Os gráficos apresentados em 14 representam o movimento do nó do meio da corda quando a força externa é nula, sendo as características físicas da corda respectivamente consideradas como:

$$\frac{\tau_0}{m} = 10 \text{ e } \frac{k}{m} = 5 \quad ; \quad \frac{\tau_0}{m} = 5 \text{ e } \frac{k}{m} = 10$$

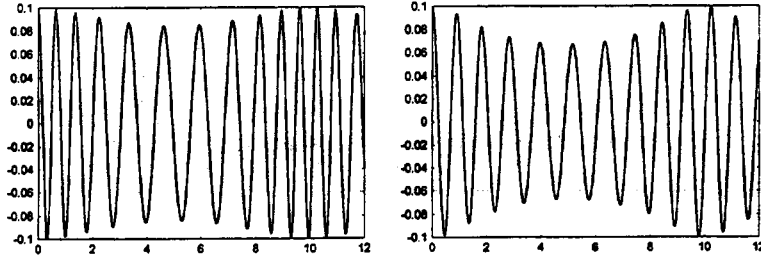


Figure 14:  $v^h(0.5, t)$  quando  $\frac{\tau_0}{m} = 10$  e  $\frac{k}{m} = 5$  e quando  $\frac{\tau_0}{m} = 5$  e  $\frac{k}{m} = 10$

Apresentamos em 15 os gráficos obtidos quando tomamos

$$\frac{\tau_0}{m} = 50 \text{ e } \frac{k}{m} = 5 \quad ; \quad \frac{\tau_0}{m} = 5 \text{ e } \frac{k}{m} = 50$$

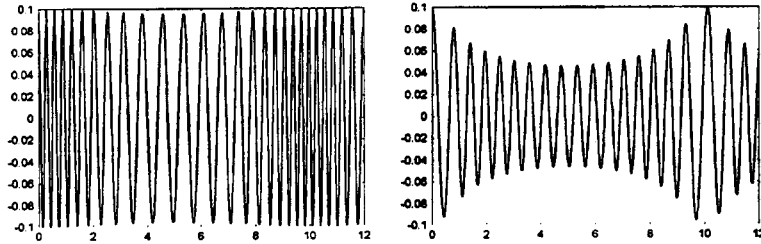


Figure 15:  $v^h(0.5, t)$  quando  $\frac{\tau_0}{m} = 50$ , e  $\frac{k}{m} = 5$  e quando  $\frac{\tau_0}{m} = 5$ , e  $\frac{k}{m} = 50$

Observemos que, apesar de tomarmos uma função  $\gamma(t)$  que contraria a hipótese do Teorema 1, foi possível resolver o Problema I.

## 8.4 Exemplo 4

Consideraremos, para o atual exemplo, uma corda elástica com sua condição inicial dada pela seguinte função:

$$v^h(y, 0) = \begin{cases} \frac{1}{10}y^2 & 0 \leq y \leq 0.5 \\ \frac{1}{10}(y-1)^2 & 0.5 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (74)$$

Sendo a velocidade inicial nula, ou seja,

$$\frac{\partial v^h(y, 0)}{\partial t} = 0$$

A função apresentada em (74) é uma função contínua onde  $v^h(y, 0) \in H_0^1(0, 1)$  mas  $v^h(y, 0) \notin H^2(0, 1)$ , sendo assim a função (74) não satisfaz ao Teorema 1.

O movimento dos extremos são dados por:

$$\alpha(t) = -t, \quad \beta(t) = t + 1 \quad (75)$$

E ainda, tomando as características físicas da corda elástica como

$$\frac{\tau_0}{m} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{k}{m} = 5$$

O gráfico 16 mostra o movimento do nó central da corda quando tomamos o tempo  $t \in [0, T] = [0, 10]$ .

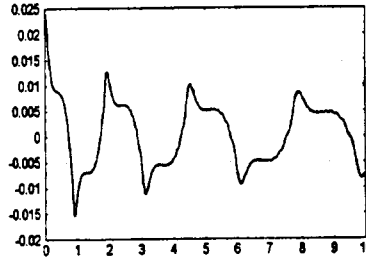


Figure 16: Deslocamento do ponto do meio da corda

Podemos observar através do gráfico 16 que o movimento do nó central da corda não é tão suave quanto nos outros exemplos apresentados, mesmo assim está coerente e o amortecimento ocorre como esperado.

A Figura 17 mostra a posição da corda em  $t = 0 ; 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1$  onde o tamanho  $\gamma(t)$  da corda varia de 1 para 3.



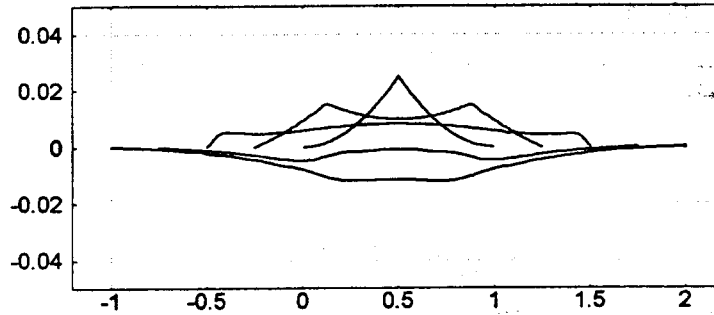


Figure 17:  $u(x, t)$

## References

- [1] CARRIER, C. E.; *On the vibration problem of elastic string*, Q. J. Appl. Math., 151-165 (1953)
- [2] HUGLES, T. J. R.; *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall (1987)
- [3] MEDEIROS, L. A.; FERREL, J. L.; *Kirchhoff-Carrier elastic string in non cylindrical domains*, Portugaliae Mathematica, Vol. 56 Fas. 465-500 (1999)
- [4] LIU, I-SHIH; RINCON, M. A.; *Kirchhoff-Carrier String with Moving Ends: Numerical Simulations*, Submetido Applied Mathematics and Computation (2000)
- [5] LIU, I-SHIH; RINCON, M. A.; *Non Linear Model of Vibrating String with Moving Ends*, SIAM - Annual Meeting (2000)
- [6] LIU, I-SHIH; RINCON, M. A.; *Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Análise e Aplicações*, Editora IM/UFRJ (2001)